Question :

(Ecrit de la Banque de France 2008) Soient a et b deux réels et $M(a,b) = (M_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice carrée d'ordre n, avec $n \geq 2$, définie par $M_{ii} = a$ pour $1 \leq i \leq n$ et $M_{ij} = b$ pour $1 \leq i \neq j \leq n$.

a) Calculer le déterminant $D(a,b)$ de $M(a,b)$.

b) Calculer le polynôme caractéristique $P_M(X)$ de $M(a,b)$. En déduire les valeurs propres de $M(a,b)$ avec leurs multiplicités.

c) Pour quelles valeurs de a et b la matrice $M(a,b)$ est-elle inversible ? Déterminer alors $M(a,b)^{-1}$ comme un polynôme de $M(a,b)$.

[0] © 2010, Dany-Jack Mercier, tous droits réservés. Site internet MegaMaths.